サイバーグ–ウィッテン方程式
ホモトピー論的手法を中心に

Seiberg-Witten 方程：以同伦论手法为中心

（2026/02/01）

笹平裕史（ささひらひろふみ）

这只是一份粗浅翻译的草稿。很多证明和参考文献都被省略了。如果你想知道证明、阅读更完整版本，或是阅读其他章节的翻译，请到 fzhan@ncsu.edu 催促我。知道我的翻译工作得到别人关心的话，甚至对别人有帮助的话，我会很开心。

CHAPTER 7

Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型

从无限维泛函定义的 Floer 同调能否用某个拓扑空间（CW 复形，或者是 CW 复形的谱，稳定同伦型）的同调来再现，这样的问题提出在 Floer Memorial Volomn [?] 中收录的 Cohen-Jones-Segal 论文中（这个问题最开始 Floer 自己似乎也有所考虑）。Manolescu [?] 让这个问题在 Seiberg-Witten 理论方面有所进展。Manolescu 在 $b_1(Y) = 0$ 时从 Seiberg-Witten 方程定义了被称为 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的 S^1 稳定同伦型。取其 S^1 等变同调就再现 Seiberg-Witten Floer 同调。此外，用 Seiberg-Witten Floer 同伦型可以在带边界四维流形上定义 Bauer—古田不变量。

1. 稳定同伦范畴

为了定义 Seiberg-Witten Floer 同伦型，我们来定义必要的稳定同伦范畴。

定义 7.1. 令 $\mathfrak{C}$ 为如下定义的范畴:

- $\mathfrak{C}$ 的对象是三元组 (W, m, n). 其中，W 是带基点的 S^1-CW 复形，$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Q}$。
- 对于 $\mathfrak{C}$ 的对象 $(W_0, m_0, n_0), (W_1, m_1, n_1)$，将态射的集合在 $n_0 - n_1 \in \mathbb{Z}$ 时定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}((W_0, m_0, n_0), (W_1, m_1, n_1))\\ =&\lim_{p,q\to\infty}[\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}W_0, \Sigma^{\mathbb{R}^{p+m_1-m_0}\oplus\mathbb{C}^{q+n_1-n_0}}W_1]_{S^1},\end{aligned}$$

$n_0 - n_1 \notin \mathbb{Z}$ 时则定义

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}((W_0, m_0, n_0), (W_1, m_1, n_1)) = \varnothing.$$

这里 $[\cdot,\cdot]_{S^1}$ 是保基点 S^1 映射的同伦类的集合，$\Sigma^{\mathbb{R}}.\Sigma^{\mathbb{C}}$ 表示关于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 的约化纬悬。

对正整数 p, q 定义

$$\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}(W,m,n)=(\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}W,m,n).$$

引理 7.2. 对正整数 r，有典范同构

$$\Sigma^{\mathbb{R}^r}(W,m,n)\cong(W,m-r,n),\Sigma^{\mathbb{C}^r}(W,m,n)\cong(W,m,n-r).$$

证明. 由定义

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\Sigma^{\mathbb{R}^r}(W,m,n),(W,m-r,n))\\
=&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}((\Sigma^{\mathbb{R}^r}W,m,n),(W,m-r,n))\\
=&\lim_{p,q\to\infty}[\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}W,\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}W]_{S^1}.
\end{aligned}$$

是故以 $\Sigma^{\mathbb{R}^p\oplus\mathbb{C}^q}W$ 的恒等映射为代表元的态射给出了 $\Sigma^{\mathbb{R}^p}(W,m,n)$ 与 $(W,m-r,n)$ 之间的同构。

同理可得第二个同构。 □

基于这个引理，对于 $r\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{Q}$ 我们定义（作为“纬悬的逆”）

$$\Sigma^{-\mathbb{R}^r}(W,m,n):=(W,m+r,n),\Sigma^{-\mathbb{C}^r}(W,m,n):=(W,m,n+q).$$

更进一步，对有限维实线性空间 V 我们定义

$$\Sigma^{-V}(W,m,n):=(\Sigma^V W,m+2\dim_{\mathbb{R}}V,n).$$

对有限维复线性空间 V 我们定义

$$\Sigma^{-V}(W,m,n):=(W,m,n+\dim_{\mathbb{C}}V).$$

引理 7.3. V 是有限维实或复线性空间时，在 $\mathfrak{C}$ 中有典范同构

$$\Sigma^{-V}\Sigma^V(W,m,n)\cong(W,m,n)\cong\Sigma^V\Sigma^{-V}(W,m,n).$$

证明. 令 V 是实线性空间，取线性同构 $f:V\xrightarrow{\cong}\mathbb{R}^r$. 因为 $\pi_0(GL(r,\mathbb{R}))=\mathbb{Z}_2$，$f$ 的取法除去同伦后有 2 种。但是同构 $f\oplus f:V\oplus V\xrightarrow{\cong}\mathbb{R}^{2r}$ 的同伦类不依赖于 f 的取法。

由定义有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\Sigma^{-V}\Sigma^{V}(W,m,n),(W,m,n))\\
=&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}((\Sigma^{V\oplus V}W,m+2r,n),(W,m,n))\\
=&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}((\Sigma^{\mathbb{R}^{2r}}W,m+2r,n),(W,m,n)) \qquad\qquad (\text{使用同构 } f\oplus f)\\
=&\lim_{p,q\to\infty}[\Sigma^{\mathbb{R}^{p+2r}\oplus\mathbb{C}^{q}}W,\Sigma^{\mathbb{R}^{p+2r}\oplus\mathbb{C}^{q}}W]_{S^1}.
\end{aligned}
$$

以 $\Sigma^{\mathbb{R}^{p+2r}\oplus\mathbb{C}^{q}}W$ 的恒等映射为代表的态射给出了 $\Sigma^{-V}\Sigma^{V}(W,m,n)$ 与 (W,m,n) 的同构。同理还可得 $\Sigma^{V}\Sigma^{-V}(W,m,n)$ 与 (W,m,n) 之间的同构。

接下来令 V 是复线性空间。因为有 $\pi_0(GL(r,\mathbb{C}))=0$，同构 $f:V\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}$ 的取法除掉同伦后是唯一确定的。与前述同理可得所求同构。 □

对于 $m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Q}$，将 (S^0,m,n) 写为 $(\mathbb{R}^{-m}\oplus\mathbb{C}^{-n})^+$。

$\mathfrak{t}$ 为 spin 结构时，可以定义 Pin(2) 等变 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型。应用上考虑 Pin(2) 等变更加重要。为了定义 Pin(2) 等变 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型，我们现在来定义 Pin(2) 等变稳定同伦范畴。令 $G=\mathrm{Pin}(2)$ 。

定义 7.4. 令 $\mathfrak{C}_G$ 为如下定义的范畴。

- $\mathfrak{C}_G$ 的对象是三元组 (W,m,n) 。这里 W 是带基点 G-CW 复形，$m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Q}$.
- 对于 $\mathfrak{C}_G$ 的对象 $(W_0,m_0,n_0),(W_1,m_1,n_1)$，将态射的集合在 $n_0-n_1\in\mathbb{Z}$ 时定义为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_G}((W_0,m_0,n_0),(W_1,m_1,n_1))\\
=&\lim_{p,q\to\infty}[\Sigma^{\tilde{\mathbb{R}}^{p}\oplus\mathbb{H}^{q}}W_0,\Sigma^{\tilde{\mathbb{R}}^{p+n_0-n_1}\oplus\mathbb{H}^{q+m_0-m_1}}W_1]_G,
\end{aligned}
$$

在 $n_0-n_1\notin\mathbb{Z}$ 时定义

$$
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}_G}((W_0,m_0,n_0),(W_1,m_1,n_1))=\varnothing.
$$

$\tilde{\mathbb{R}}$ 是实一维的非平凡 G 表示。

同上我们做接下来的定义。令 V 是 G 的表示空间，且有 $V\cong\tilde{\mathbb{R}}^{r}\oplus\mathbb{H}^{s}$。此时我们做

$$
\Sigma^{-V}(W,m,n):=(\Sigma^{V^{S^1}}W,m+2r,n+s)\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}_G.
$$

V^{S^1} 是 S^1 不动点形成的子空间。此外，对 $q \in \mathbb{Q}$，令

$$\Sigma^{-q\mathbb{H}}(W, m, n) := (W, m, n+q) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{C}_G.$$

我们还将 (S^0, m, n) 写为 $(\tilde{\mathbb{R}}^{-m} \oplus \mathbb{H}^{-n})^+$.

2. Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的结构

我们来说明 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的结构。将 $Y \times \mathbb{R}$ 上的 Seiberg-Witten 方程（6.3）[?]（形式上地）与无穷维上的流线等同。我们将这个流线进行有限维近似，运用在第三章说明的 Conley 理论定义 Floer 同伦型。$b_1(Y) = 0$ 情况，结构可以依据于 Manolescu [?] 而定。$b_1(Y) > 0$ 的情况有本质性的困难，结构变得更难。这个情况下，结构可以根据 Kroheimer-Manolescu [?]，Khandhawit—林—笹平 [?]，笹平—Stoffregen[?] 决定。本书只说明 $b_1(Y) = 0$ 的情况。

令 Y 是有向闭三维流形。令 $g, \mathfrak{t}$ 是 Y 的 Riemann 度规和 spin^c 结构。更进一步在这里假定 $b_1(Y) = 0$。取 Y 上的平坦 spin^c 联络 A_0（除去规范变换后，A_0 的选法是唯一的）。令 S 为旋量丛。陈—Simons—Dirac 泛函 CSD 可以定义为 $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}) = i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(S)$ 上的泛函（参照 6.2 节）。与定义 Bauer—古田不变量时在 (5.7) 取 Coulomb 规范同理，这里也取 Coulomb 规范

$$V = \ker(d^* : i\Omega^1(Y) \to i\Omega^0(Y)) \oplus \Gamma(S).$$

（非线性）Coulomb 投影

$$\Pi_C : \mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}) \to V$$

定义为

$$\Pi_C(a, \phi) = (e^{\xi(A)})^*(a, \phi) = (a - d\xi(a), e^{\xi(a)}\phi).$$

这里 $\xi(a) : Y \to i\mathbb{R}$ 是以下方程的唯一解：

$$\Delta\xi(a) = d^*a, \int_Y \xi(a) d\mu = 0.$$

唯一性可以通过考虑 Hodge 分解得到。这个在定义 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型用到的方程，对 $\gamma = (a, \phi) : \mathbb{R} \to V$ 是以下的方程：

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t) = -\Pi_{C*} \operatorname{grad} CSD(\gamma(t)).$$

这里，Π_{C*} 是关于 $\gamma(t)$ 的 Π_C 的微分。直接计算可将上面的方程写为下面的样子

$$\frac{\partial a}{\partial t}(t) = -*(da(t) + q(\phi(t))) + d\xi(q(\phi)).$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t) = -\not{D}_{A_0}\phi(t) - \rho(a(t))\phi(t) - \xi(q(\phi(t)))\phi(t).$$

这里，如果我们有

$$l(a,\phi) = (*da, D_{A_0}\phi)$$

$$c(a,\phi) = (q(\phi(t)) - d\xi(q(\phi(t))), \rho(a)\phi + \xi(q(\phi))\phi)$$

那么方程可以写为

$$\gamma : \mathbb{R} \to V$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t) = -(l+c)(\gamma(t)).$$

这个方程可以看成关于 V 上适当度规的 CSD 的梯度流的方程（这个事实本书并不使用，详细情况见论文 [?]）。

直接的计算可以证明以下。

引理 7.5. 对于 *(6.3)* 的解 $\tilde{\gamma}$，如果我们有 $\gamma(t) := \Pi_C\tilde{\gamma}(t)$，那 γ 就成为 *(7.2)* 的解。相反令 $\tilde{\gamma}$ 是 *(7.2)* 的解。如果有 $\check{\gamma}(t) := (e^{\int_0^t \xi(q(\phi))})^*(\gamma(t))$，那 $\check{\gamma}$ 就成为 *(6.3)* 的解。这里 $(e^{\int_0^t \xi(q(\phi))})^*$ 表示基于 $e^{\int_0^t \xi(q(\phi))}$ 的 Y 上的规范变换。甚者，有

$$CSD(\gamma(t)) = CSD(\check{\gamma}(t)).$$

更进一步，关于 Π_C，有以下引理成立。

引理 7.6. 令 $f : Y \to i\mathbb{R}$ 是光滑函数。对 $(a,\phi) \in \mathcal{C}(Y,\mathfrak{t})$，令 $\Pi_C(a,\phi) = (a',\phi')$。这时有

$$\Pi_C((e^f)^*(a,\phi)) = (a', e^{-\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y,g)}\int_V f d\mu}\phi').$$

这里 $\mathrm{Vol}(Y,g)$ 是与 g 有关的 Y 的体积。特别地，对 $k \geq 0$，

$$\left\|\Pi_C((e^f)^*(a,\phi))\right\|_{L^2_k(Y)} = \|\Pi_C(a,\phi)\|_{L^2_k(Y)}.$$

证明. TBA □

$Y \times \mathbb{R}$ 上的 Seiberg-Witten 方程具有以下的紧致性。

定理 7.7. 令 k 是任意非负实数。假定 $b_1(Y)=0$。存在常数 $R_0>0$ 使得下述命题成立：令 $\check{\gamma}:\mathbb{R}\to\mathcal{C}(Y,\mathfrak{t})$ 是 *Seiberg-Witten* 方程 *(6.3)* 的解，且 $CSD(\check{\gamma}(t))$ 有界。此时，对任意 $s\in\mathbb{R}$，存在光滑函数 $f:Y\times[s-1,s+1]\to\mathbb{R}$, 使得

$$\left\|(e^f)^*\check{\gamma}\right\|_{L^2_k(Y\times[s-1,s+1])}\le R_0.$$

这里 $(e^f)^*$ 表示四维上的规范变换。

这个定理来自 Kroheimer-Mrowka [?] 书中的 Theorem 5.1.1, Lemma 16.3.2, Lemma 16.4.4.

依据引理 7.5、引理 7.6、定理 7.7 得到下面推论。

推论 7.8. 假定 $b_1(Y)=0$. 令 $k\ge 0$。存在某个常数 $R_0>0$ 使得下述成立。令 $\gamma:\mathbb{R}\to V$ 是方程 *(7.2)* 的解，且 $CSD(\gamma(t))$ 有界。此时，对所有 $t\in\mathbb{R}$，成立

$$\|\gamma(t)\|_{L^2_k(Y)}\le R_0.$$

甚者，还成立

$$\|\gamma\|_{L^2_k(Y\times[s-1,s+1])}\le R_0.$$

将方程 (7.2) 的有限维近似如下选取。l 是 V 上的自伴算子，V 可分解为 l 的特征空间

$$V=\bigoplus_{\lambda}V_\lambda.$$

λ 取遍 l 的特征值。进一步，特征值全部为实数。

$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，对 $\lambda<\mu$ 令 V^μ_λ 为特征值属于区间 $(\lambda,\mu]$ 的特征向量张成的子空间。根据椭圆型微分算子的一般理论，V^μ_λ 是有限维的（参考 Lawson-Michelsohn 书 [?] 中的 Chapter III, Theorem 5.8）。令 $p^\mu_\lambda:V\to V^\mu_\lambda$ 是 L^2-投影。取正实数 R 使得 $R>R_0$。R_0 是推论 7.8 中的实数。令 $B(V,R):=\{y\in V|\,\|y\|_{L^2_k(Y)}\le R\}$，并取满足以下条件的光滑函数 $\chi:V\to[0,1]$：

$$\chi\equiv 1, \text{在 } B(V,R) \text{ 上}$$
$$\operatorname{supp}(\chi)\subset B(V,2R)$$

作为方程 (7.2) 的有限维近似，考虑如下方程，

$$\gamma : \mathbb{R} \to V_\lambda^\mu$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t) = -\chi(\gamma(t))(l + p_\lambda^\mu c)(\gamma(t)).$$

从方程 (7.3) 得到流线

$$\varphi_\lambda^\mu : V_\lambda^\mu \times \mathbb{R} \to V_\lambda^\mu.$$

为了适用 Conley 理论我们证明如下。

定理 7.9. 假定 $b_1(Y) = 0$。对于 $\lambda \ll 0, \mu \gg 0$，$B(V_\lambda^\mu, R)$ 是关于流线 φ_λ^μ 的孤立邻域。

这个定理的证明要用到如下命题。

命题 7.10. 令 $a, b \in \mathbb{R}$。$a < b$。令函数列 $\gamma_n : [a, b] \to L_k^2(i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(S))$ 关于 $L_k^2(Y)$ 范数一致有界，并且令之关于 $L^2(Y)$ 范数等度连续。此时，存在某个 $\gamma : [a, b] \to L_k^2(i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(S))$ 使得取适当的子列后，γ_n 以 $L_{k-1}^2(Y)$ 范数一致收敛到 γ。

证明. TBA □

定理 7.9 的证明. TBA □

命题 7.11. 令 $\lambda' < \lambda \ll 0, \mu' > \mu \gg 0$。令 (N, L) 是 $\mathrm{Inv}(B(V_\lambda^\mu, R))$ 的 S^1 等变指数对，(N', L') 是 $\mathrm{Inv}(B(V_{\lambda'}^{\mu'}, R))$ 的 S^1 等变指数对。此时有 S^1 同伦等价

$$N'/L' \sim (N/L) \wedge (V_{\lambda'}^\lambda)^+.$$

证明. TBA □

由定理 7.9，对 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \ll 0, \mu \gg 0$，可以考察 $\mathrm{Inv}(B(V_\lambda^\mu, R), \varphi_\lambda^\mu)$ 的 Conley 指数。Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型虽然基本上可以作为 Conley 指数来定义，但是为了可以不依赖于 Y 的 Riemann 度规而定义，有必要按以下样子定义有理数 $n(Y, \mathfrak{t}, g)$。令 $(X, \mathfrak{s})$ 为紧致光滑四维 spin^c 流形，且有边界 $(Y, \mathfrak{t})$（我们知道这样的

$(X,\mathfrak{s})$ 总是存在的）。此时，令 $\hat{g}$ 是 X 的 Riemann 度规，限制到 Y 上是 g ，$\hat{A}_0$ 是 X 上的 spin^c 联络，限制到 Y 上是 A_0。我们让

$$n(Y,\mathfrak{t},g) := \operatorname{ind}(\hat{\not{D}}_{\hat{A}_0} \oplus p^0 r) - \frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8} \in \mathbb{Q}.$$

这里，$\sigma(X)$ 是 X 的相交形式的符号差，$\hat{\not{D}}_{\hat{A}_0} : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ 是 X 上的 Dirac 算子，$r : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ 是到 X 的边界 Y 的限制。

$$\hat{\not{D}}_{\hat{A}_0} \oplus p^0 r : L^2_1(\Gamma(S^+)) \to L^2(\Gamma(S^-)) \oplus L^2_{\frac{1}{2}}(\Gamma(S)^0)$$

于是成为 Fredholm 算子，$\operatorname{ind}(\not{D})_{\hat{A}_0} \oplus p^0 r \in \mathbb{Z}$ 是其指数。这里，$L^2_{\frac{1}{2}}(S)^0$ 是 $\not{D}_{A_0}$ 的特征值小于 0 的特征向量张成的 $L^2_{\frac{1}{2}}(S)$ 的子空间。

引理 7.12. *有理数 $n(Y,\mathfrak{t},g)$ 不依赖于 $(X,\mathfrak{s}), \hat{g}, \hat{A}_0$ 的取法，只依赖于 $(Y,\mathfrak{t},g)$。*

证明. TBA □

定义 7.13. *令 $(Y,\mathfrak{t})$ 是三维闭 spin^c 流形。假定 $b_1(Y)=0$。Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型定义为*

$$SWF(Y,\mathfrak{t}) := \Sigma^{-(V^0_\lambda \oplus \mathbb{C}^{n(Y,\mathfrak{t},g)})}(N/L) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{C}.$$

在这里要求，$\lambda \ll 0, \mu \gg 0, (N,L)$ 是孤立不动点集 $\operatorname{Inv}(B(V^\mu_\lambda,R),\varphi^\mu_\lambda)$ 的 S^1 等变指数对。

定理 7.14. *$SWF(Y,\mathfrak{t})$ 除去 $\mathfrak{C}$ 中的典范同构后，不依赖 $g,\lambda,\mu,(N,L)$ 的取法，是 $(Y,\mathfrak{t})$ 的不变量。*

这个的定理的证明将在 7.4 节进行。不依赖于 λ,μ 由命题 7.11 可知。

正如在 5.8 节见到的 spin 四维流形上的 Seiberg-Witten 方程是 Pin(2) 等变的，并且在应用上是重要的。写 $G := \mathrm{Pin}(2)$。三维的情况同理有 Seiberg-Witten 方程是 G 等变的。令 $\mathfrak{t}$ 是 Y 的 spin 结构，A_0 是 spin 联络。Y 上的旋量丛 S 是四元数向量丛。对 V^μ_λ 与 (5.11) 同理可以定义 G 作用。此时，流线 φ^μ_λ 成为 G 等变。G 等变 Conley 理论运用到 φ^μ_λ，我们定义 G 等变 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型。

定义 7.15. 令 $(Y,\mathfrak{t})$ 是三维闭 *spin* 流形。假定 $b_1(Y)=0$。此时，G 等变 *Seiberg-Witten Floer* 稳定同伦型定义为

$$SWF(Y,\mathfrak{t}) := \Sigma^{-(V_\lambda^0 \oplus \mathbb{H}^{\frac{1}{2}n(Y,\mathfrak{t},g)})}(N/L) \in \mathfrak{C}_G.$$

这里，有 $\lambda \ll 0, \mu \gg 0$，且有 (N,L) 是 $\mathrm{Inv}(B(V_\lambda^\mu, R), \varphi_\lambda^\mu)$ 的 G 等变指数对。

定理 7.16. *G 等变 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 除去 $\mathfrak{C}_G$ 上的典范同构后，不依赖于 $g,\lambda,\mu,(N,L)$ 的取法，是 $(Y,\mathfrak{t})$ 的不变量。*

根据 Lidman-Manolescu[?]，能够证明取 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的同调可以再现 Seiberg-Witten Floer 同调（6.2 节）。这意味着，Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型是 Seiberg-Witten Floer 同调的精细化。

定理 7.17 (Lidman-Manolescu[?]). *有以下同构：*

$$\tilde{H}_*^{S^1}(SWF(Y,\mathfrak{t});\mathbb{Z}) \cong \widetilde{HM}_*(Y,\mathfrak{t}),$$
$$c\tilde{H}_*(SWF(Y,\mathfrak{t});\mathbb{Z}) \cong \widehat{HM}_*(Y,\mathfrak{t}),$$
$$t\tilde{H}_*(SWF(Y,\mathfrak{t});\mathbb{Z}) \cong \overline{HM}_*(Y,\mathfrak{t}).$$

令 $-Y$ 是 Y 的逆定向流形。此时，Y 的陈—Simons—Dirac 泛函 CSD_Y 和 $-Y$ 的陈—Simons—Dirac 泛函 CSD_{-Y} 满足以下等式：

$$CSD_Y = -CSD_{-Y}.$$

由此，从 $Y,-Y$ 上 Seiberg-Witten 方程定义的流线，有以下成立：

$$\varphi_{-\mu,-Y}^{-\lambda} = \varphi_{\lambda,Y}^{\mu}.$$

这里，$-\varphi_{\lambda,Y}^\mu$ 是 $\varphi_{\lambda,Y}^\mu$ 的反向流线：

$$-\varphi_{\lambda,Y}^\mu(g,t) = \varphi_{\lambda,Y}^\mu(g,-t).$$

由此，与定理 3.25 同理有以下成立。另外，见论文 [?] 的 4.4 节。

定理 7.18. *$SWF(Y,\mathfrak{t})$ 与 $SWF(-Y,\mathfrak{t})$ 是 Spanier–Whitehead 对偶。也就是说有 $\mathfrak{C}$ 中的态射*

$$\delta : SWF(Y,\mathfrak{t}) \wedge SWF(-Y,\mathfrak{t}) \to S^0$$

与

$$\eta : S^0 \to SWF(Y, \mathfrak{t}) \wedge SWF(-Y, \mathfrak{t}),$$

满足与定义 *3.23* 中一样的条件。

3. 带边界四维流形的相对 Bauer—古田不变量

令 X 是联通、紧致的有向带边界四维流形。令 $\partial X = Y = \coprod_{i=1}^{b_0(Y)} Y_i$。$Y_i$ 是 Y 的联通分支。并且，假定 $b_1(Y) = 0$。取 X 的 spin^c 结构 $\mathfrak{s}$。使用 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的话，在 5.4 节定义的 Bauer—古田不变量可以对带边界流形 X 定义。我们将之称为相对 Bauer—古田不变量。$b_1(X) = 0$ 的情况下，相对 Bauer—古田不变量可以定义为 7.1 节定义的范畴 $\mathfrak{C}$ 中的态射

$$\Phi_X(\mathfrak{s}) : \left(\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8}}\right)^+ \to \Sigma^{\mathbb{R}^{b^+(X)}} SWF(Y, \mathfrak{t}).$$

$b_1(Y) = 0$ 时，这个结构依于 Manolescu[?] 而定。$b_1(Y) > 0$ 时，依 Khandhawit—林—笹平 [?]、笹平—Stoffregen[?] 而定。

取 X 的 spin^c 结构 $\mathfrak{s}$、Riemann 度规 $\hat{g}$、spin^c 联络 $\hat{A}_0$。令 $\hat{A}_0$ 向 Y 的限制是平坦联络 A_0。为了定义相对 Bauer—古田不变量，有必要为 X 上的 Seiberg-Witten 方程加上适当的边界条件。这个条件被称为**双 Coulomb 条件**，由 Khandhawit[?] 引入。

对 X 上的微分 1 形式 $\hat{\alpha} \in i\Omega^1(X)$，将以下的条件称为双 Coulomb 条件：

$$\begin{cases} \hat{d}^* \hat{\alpha} = 0, \\ d^*(\hat{\alpha}|_Y) = 0, \\ \int_{Y_i} (\iota_\nu \hat{\alpha}) d\mu = 0 (i = 1, \cdots, b_0(Y)). \end{cases}$$

这里，$\hat{d}$ 是 X 上的外微分，$\hat{d}^*$ 是其伴随算子，ν 是 Y 上向外的法向量，ι_ν 是根据 ν 的缩并。满足双 Coulomb 条件的微分 1 形式的空间写为 $\Omega^1_{CC}(X)$。

命题 7.19. *有如下的（并非 $L^2(X)$ 正交的）直和分解：*

$$\Omega^1(X) = \Omega^1_{CC}(X) \oplus d\Omega^0(X).$$

证明见 Khandhawit 的论文 [?]。

利用 X 上的 $\hat{A}_0$，将所有 spin^c 联络的空间视同 $i\Omega^1(X)$。令 $\hat{A}_0$ 向边界 Y 的限制为平坦联络。由这个命题，对 $(\hat{a},\hat{\phi}) \in i\Omega^1(X) \oplus \Gamma(S^+)$，则只存在一个规范变换 $e^f, f : X \to i\mathbb{R}$，成立

$$(e^f)^*(\hat{a},\hat{\phi}) = (\hat{a} - df, e^f\hat{\phi}) \in i\Omega^1_{CC}(X) \oplus \Gamma(S^+)$$

$$\int_X f d\mu = 0$$

以后，为了记号简便，假定 $b_1(X) = 0$。为了定义 Bauer—古田不变量，Seiberg-Witten 方程的紧致性是重要的。

定理 7.20. 假定 $b_1(X) = 0, b_1(Y) = 0$。令 $k \geq 4$。则存在常数 $R_1 > 0$ 使得以下成立。令 $x = (\hat{a},\hat{\phi}) \in i\Omega^1_{CC}(X) \oplus \Gamma(S^+)$ 是 X 上 *Seiberg-Witten* 方程的解，并且令

$$\gamma : [0,\infty) \to V$$

是方程 *(7.2)* 的解。令 $CSD(\gamma(t))$ 作为 $[0,\infty)$ 上的函数有界，且满足

$$r(x) = \gamma(0).$$

此时，

$$\|x\|_{L^2_k(X)} \leq R_1, \|\gamma(t)\|_{L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)} \leq R_1 (\forall t \in [0,\infty)).$$

这个定理的证明见 Khandhawit 的论文 [?] 的 4.1 节。

取 $\mu > 0$。将 Seiberg-Witten 映射

$$SW^\mu : L^2_k(i\Omega^1_{CC}(X) \oplus \Gamma(S^+)) \to L^2_{k-1}(i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)) \oplus L^2_{k-\frac{1}{2}}(V^\mu)$$

定义为

$$\begin{aligned} SW^\mu(\hat{a},\hat{\phi}) &= (sw(\hat{a},\hat{\phi}), p^\mu r(\hat{a},\hat{\phi})) \\ &= (F^+_{(\hat{A}_0+\hat{a})^{\det}} + q(\hat{\phi}), \not{D}_{\hat{A}_0+\hat{a}}\hat{\phi}, p^\mu r(\hat{a},\hat{\phi})) \\ &= (2\hat{d}^+\hat{a} + F^+_{\hat{A}_0^{\det}} + q(\hat{\phi}), \not{D}_{\hat{A}_0}\hat{\phi} + \rho(\hat{a}), p^\mu r(\hat{a},\hat{\phi})). \end{aligned}$$

如果有

$$D(\hat{a},\hat{\phi}) = (2\hat{d}^+\hat{a}, \hat{\not{D}}_{\hat{A}_0}\hat{\phi}), C(\hat{a},\hat{\phi}) = (F^+_{\hat{A}_0^{\det}} + q(\hat{\phi}), \rho(\hat{a})\hat{\phi}),$$

那么可以写

$$SW^{\mu}(\hat{a},\hat{\phi}) = (D(\hat{a},\hat{\phi}) + C(\hat{a},\hat{\phi}), p^{\mu}r(\hat{a},\hat{\phi})).$$

将这个映射进行有限维近似得到的就是相对 Bauer—古田不变量 $\Phi_X(\mathfrak{s})$。为了定义 $\Phi_X(\mathfrak{s})$ 我们叙述命题和定义，

命题 7.21 (Atiyah-Patodi-Singer[**?**]). 算子

$$D \oplus p^{\mu}r : L^2_k(i\Omega^1_{CC}(X) \oplus \Gamma(S^+)) \to L^2_{k-1}(i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)) \oplus L^2_{k-\frac{1}{2}}(V^{\mu})$$

是 *Fredholm* 的.

取 $L^2_{k-1}(i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-))$ 的充分大有限维子空间 F 与 $\lambda \ll 0$ 后，$\mathrm{Im}(D \oplus p^{\mu}r)$ 与 V^{μ}_{λ} 横截相交。取 F 作为 $L^2_{k-1}(i\Omega^+(X))$ 的实子线性空间 $F_{\mathbb{R}}$ 与 $L^2_{k-1}(\Gamma(S^-))$ 的复子线性空间 $F_{\mathbb{C}}$ 的直和

$$F = F_{\mathbb{R}} \oplus F_{\mathbb{C}}.$$

此时有

$$E = E_{\mathbb{R}} \oplus E_{\mathbb{C}} = (D \oplus p^{\mu}r)^{-1}(F \oplus V^{\mu}_{\lambda}).$$

E 是有限维，于是

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{R}} - \dim_{\mathbb{R}}(F_{\mathbb{R}} \oplus V^{\mu}_{\lambda,\mathbb{R}}) = \mathrm{ind}_{\mathbb{R}}(d^+ \oplus p^0 r) - \dim_{\mathbb{R}}(V^{\mu}_{0,\mathbb{R}}) = b^+(X) - \dim_{\mathbb{R}} V^{\mu}_{0,\mathbb{C}},\\ \mathrm{ind}_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}} \oplus V^{\mu}_{\lambda,\mathbb{C}}) = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(\hat{\not{D}}_{\hat{A}_0} \oplus p^0 r) - \dim_{\mathbb{C}} V^{\mu}_{0,\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

将 SW^{μ} 的有限维近似映射

$$SW^{\mu}_{F,\lambda} : E \to F \oplus V^{\mu}_{\lambda}$$

定义为

$$SW^{\mu}_{F,\lambda}(x) = (p_F sw(x), p^{\mu}r(x)) = (D(x) + p_F C(x), p^{\mu}r(x)).$$

取正数 $R, R' > \max\{R_0, R_1\}, R \gg R', \epsilon > 0$。这里 R_0, R_1 是推论 7.9、定理 7.20 中的常数。令

$$
\begin{aligned}
B(V_\lambda^\mu, R) &= \{y \in V_\lambda^\mu | \, \|y\|_{L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)} \leq R\} \\
B(E, R') &= \{x \in E | \, \|x\|_{L^2_k(X)} \leq R'\} \\
S(E, R') &= \partial B(E, R') \\
B(F, \epsilon) &= \{x \in F | \, \|x\|_{L^2_{k-1}(X)} \leq \epsilon\} \\
S(F, \epsilon) &= \partial B(F, \epsilon).
\end{aligned}
$$

因为 $r : L^2_k(X) \to L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)$ 有界，可以令

$$p^\mu r(B(E, R')) \subset B(V_\lambda^\mu, R).$$

另外写

$$K_1 = K_1(F, \lambda, \mu, \epsilon) = \{y \in B(V_\lambda^\mu, R) | \exists x \in B(E, R'), y = p^\mu r(x), \|p_F sw(x)\|_{L^2_{k-1}(X)} \leq \epsilon\},$$

$$K_2 = K_2(F, \lambda, \mu, \epsilon) = \{y \in B(V_\lambda^\mu, R) | \exists x \in S(E, R'), y = p^\mu r(x), \|p_F sw(x)\|_{L^2_{k-1}(X)} \leq \epsilon\}.$$

命题 7.22. ϵ 充分小，F 充分大，$\lambda \ll 0, \mu \gg 0$ 时，存在 $\mathrm{Inv}(B(V_\lambda^\mu, R), \varphi_\lambda^\mu)$ 的 S^1 等变指数对 (N, L) 使得

$$K_1 \subset N, K_2 \subset L.$$

将 E, F 的一点紧化 E^+, F^+ 视为

$$E^+ = B(E, R')/S(E, R'), F^+ = B(F, \epsilon)/S(F, \epsilon).$$

利用命题 7.22 的指数对 (N, L)，可以定义下面的 S^1 映射:

$$f = f_{F,\lambda,\mu,N,L} : E^+ \to F^+ \wedge (N/L)$$

$$
f(x) = \begin{cases} (p_F sw(x), p^\mu r(x)) & \|p_F sw(x)\|_{L^2_{k-1}(X)} < \epsilon\text{时} \\ * & \text{其他时候} \end{cases}
$$

为了证明命题 7.22，我们证明接下来的引理。

引理 7.23. 令 l 是 *(7.1)* 的算子。对 $t \geq 0$ 考虑 V 上的算子

$$e^{tl} = 1 + tl + \frac{1}{2!}t^2 l^2 + \frac{1}{3!}t^3 l^3 + \cdots .$$

(1) 对 $y \in L^2_{k-\frac{1}{2}}(V^0)$，有

$$\left\|e^{lt} y\right\|_{L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)} \leq \|y\|_{L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)} .$$

(2) 对 $\epsilon > 0$，存在正常数 $B = B_0$，使得对 $y \in L^2(V^0), t \in [\epsilon, \infty)$ 有

$$\left\|e^{tl} y\right\|_{L^2_{k-\frac{1}{2}}(Y)} \leq B \|y\|_{L^2(Y)} .$$

证明. TBA □

写 $A = B(V^\mu_\lambda, R), A^+ = \{y \in A | \varphi^\mu_\lambda(y, [0, \infty)) \subset A\}$。由定理 3.27，对充分小 ϵ、充分大 F，$\lambda \ll 0, \mu \gg 0$，最好证明以下：

(1) $y \in K_1 \cap A^+$ 的话 $\varphi^\mu_\lambda(y, [0, \infty)) \cap \partial A = \varnothing$.
(2) $K_2 \cap A^+ = \varnothing$.

证明. TBA □

指数对 (N, L) 的取法并非唯一。令 (N', L') 是满足命题 7.22 的条件的另一个指数对。命题 3.5 的等变版本同样成立，有 S^1 同伦等价

$$\mathfrak{F}_T : N/L \to N'/L'.$$

除去这个 S^1 同伦等价，映射 $f_{F,\lambda,\mu,N,L}$ 的不依赖于取法，也即有以下成立。

命题 7.24. 令 $f = f_{F,\lambda,\mu,N,L}, f' = f_{F,\lambda,\mu,N',L'}$。下面的图表是 S^1 同伦交换的：*TBA*

这里省略证明。证明见 Khandhawit 的论文 [?] 的 appendix。

令 $F_0, F_1, F_0 \subset F_1$ 为 $i\Omega^1(X) \oplus \Gamma(S^-)$ 的充分大的有限维子空间，$l \ll 0, \mu \gg 0$。令 $E_0 = (D \oplus p^\mu r)^{-1}(F_0 \oplus V_\lambda^\mu), E_1 = (D \oplus p^\mu r)^{-1}(F_1 \oplus V_\lambda^\mu)$。我们写

$$K_1' = \left\{ y \in B(V_\lambda^\mu, R) \middle| \begin{array}{l} \exists x \in B(E_1, R') \\ p^\mu r(x) = y, \\ \exists s \in [0,1], \\ \|D(x) + ((1-s)p_{F_1} + sp_{F_0})C(x)\|_{L^2_{k-1}(X)} \leq \epsilon \end{array} \right\},$$

$$K_2' = \left\{ y \in B(V_\lambda^\mu, R) \middle| \begin{array}{l} \exists x \in S(E_1, R') \\ p^\mu r(x) = y, \\ \exists s \in [0,1], \\ \|D(x) + ((1-s)p_{F_1} + sp_{F_0})C(x)\|_{L^2_{k-1}(X)} \leq \epsilon \end{array} \right\}.$$

与命题 7.22 的证明同理，S^1 等变指数对 (N, L) 最好要满足

$$K_1' \subset N, J_2' \subset L.$$

命题 7.25. *令 F_0, F_1 为 $i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)$ 的充分大的有限维子空间，令 $F_0 \subset F_1$，且令之满足 (7.11)。令 $f_0 = f_{F_0,\lambda,\mu,N,L}, f_1 = f_{F_1,\lambda,\mu,N,L}$。此时，存在自然的 S^1 同伦*

$$f_0 \wedge (D|_{E_1 - E_0}) \sim f_1.$$

这里，$E_1 - E_0 := E_1 \cap (E_0)^\perp$.

证明. TBA □

取 F_0 为充分大 $L^2_{k-1}(i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-))$ 的有限维子空间，$\lambda \ll 0, \mu \gg 0$，使得 $F_0 \oplus V_\lambda^\mu$ 与 $\operatorname{Im} \hat{\not{D}}_{A_0} \oplus p^\mu r$ 都跟 $L^2_{k-1}(i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)) \oplus L^2_{k-\frac{1}{2}}(V^\mu)$ 横截相交。$F_0 \subset F$ 时，$L|_{E-E_0}$ 称为从 $E - E_0$ 到 $F - F_0$ 的同构。取平凡化

$$E_0 \cong \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^n,$$
$$F_0 \cong \mathbb{R}^{m'} \oplus \mathbb{C}^{n'},$$
$$F - F_0 \cong \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{C}^q.$$

此时，平凡化

$$E - E_0 \cong \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{C}^q$$

由 $L|_{E-E_0}$ 与 $F - F_0$ 的平凡化合成得到。

用上面选择的 E, F 的平凡化后，根据命题 7.25，定义 $f_{F,\lambda,\mu,N,L}$ 为范畴 $\mathfrak{C}$ 中的态射

$$(\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^{n+a})^+ \wedge (\mathbb{R}^{d^0_{\lambda,\mathbb{R}}} \oplus \mathbb{C}^{d^0_{\lambda,\mathbb{C}}})^+ \to (\mathbb{R}^{m+b^+(X)} \oplus \mathbb{C}^m)^+ \wedge (N/L).$$

这里，有 $a = \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}(\hat{\not{D}} \oplus p^0 r) \in \mathbb{Z}$，并且有 $d^0_{\lambda,\mathbb{R}}$ 是 V^0_λ 的实成分 $V^0_{\lambda,\mathbb{R}} \subset i\Omega^1(Y)$ 的维数，$d^0_{\lambda,\mathbb{C}}$ 是 V^0_λ 的复成分 $V^0_{\lambda,\mathbb{C}} \subset \Gamma(S)$ 的维数。

两边取 $\Sigma^{-\mathbb{R}^{m+d^0_{\lambda,\mathbb{R}}} \oplus \mathbb{C}^{n+d^0_{\lambda,\mathbb{C}}+n(Y,\mathfrak{s},g)}}$，得到态射

$$\Phi_X(\mathfrak{s}) : \left(\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}}\right)^+ \to \Sigma^{\mathbb{R}^{b^+(X)}} SWF(Y, \mathfrak{t}).$$

注意 7.26. *虽然为了定义 $\Phi_X(\mathfrak{s})$ 而取 E, F 的平凡化而稍稍不自然，但是改变范畴 $\mathfrak{C}$ 的态射集合的定义的话，可以避免平凡化。只是在这种情况下，范畴 $\mathfrak{C}$ 的定义变得依赖于 $\mathfrak{s}, g$。在 7.6 节进行的应用，取平凡化考虑起来更简单，所以这里取了平凡化来定义 $\Phi_X(\mathfrak{s})$。*

现在，令 $(X, \mathfrak{s})$ 是从 $(Y_0, \mathfrak{t}_0)$ 到 $(Y_1, \mathfrak{t}_1)$ 的 spin^c 配边：

$$\partial X = (-Y_0) \coprod Y_1, \mathfrak{s}|_{Y_0} = \mathfrak{t}_0, \mathfrak{s}|_{Y_1} = \mathfrak{t}_1.$$

有相对 Bauer-古田不变量

$$\Phi_X(\mathfrak{s}) : \left(\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}}\right)^+ \to SWF(-Y_0, \mathfrak{t}_0) \wedge SWF(Y_1, \mathfrak{t}_1).$$

取与恒等态射 $id_{SWF(Y_0,\mathfrak{t}_0)}$ 的 Smash 积得到

$$id_{SWF(Y_0,\mathfrak{t}_0)} \wedge \Phi_X(\mathfrak{s}) : \Sigma^{\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}}} SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \to SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \wedge SWF(-Y_0, \mathfrak{t}_0) \wedge SWF(Y_1, \mathfrak{t}_1).$$

合成定理 7.18 的对偶映射 $\delta : SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \wedge SWF(-Y_0, \mathfrak{t}_0) \to S^0$，得到态射

$$\Psi_X(\mathfrak{s}) = \Psi_X(\mathfrak{s}, \hat{g}) : \Sigma^{\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}}} SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \to SWF(Y_1, \mathfrak{t}_1).$$

我们证明 $\Psi_X(\mathfrak{s})$ 关于 X 的 Riemann 度规 $\hat{g}$，只依赖于其向边界 Y 的限制（注意我们还没有证明 $SWF(Y, \mathfrak{t}, g)$ 关于 g 不变）。也就是说，$\hat{g}$ 和 $\hat{g}'$ 都是 Riemann

度规，如果 $\hat{g}|_Y = \hat{g}'|_Y$，就有 $\Psi_X(\mathfrak{s}, \hat{g}) = \Psi_X(\mathfrak{s}, \hat{g}')$。这是因为 X 的 Riemann 度规路径 $(1-s)\hat{g} + s\hat{g}'(0 \le s \le 1)$，可以在（保持边界 Y 的数据的）关于 $\hat{g}$ 和 $\hat{g}'$ 的 X 上的 Seiberg-Witten 映射的有限维近似之间诱导同伦。$\Psi_X(\mathfrak{s})$ 不依赖于 $\hat{g}|_Y$ 一事请见下节。

Y 的平坦联络 $\hat{A}_0$ 的取法（除去规范变换后）是唯一的，从而与 Riemann 度规的讨论同理，$\Psi_X(\mathfrak{s})$ 不依赖于 $\hat{A}_0$。

命题 7.27. *$\Psi_X(\mathfrak{s})$ 只依赖于 $\mathfrak{s}, \hat{g}|_Y$，不依赖于 $\hat{A}_0$ 的取法。（下节将证明也不依赖除去同构后的 $\hat{g}|_Y$。）*

令 $G = \mathrm{Pin}(2)$。$(X, \mathfrak{s})$ 为 spin 时，相对 Bauer-古田不变量可作为 G 等变稳定同伦范畴 $\mathfrak{C}_G$ 的态射

$$\Psi_X(\mathfrak{s}) : \Sigma^{\frac{-\sigma(X)}{16}} SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \to SWF(Y_1, \mathfrak{t}_1)$$

来定义。

4. 配边，场论，不变性

令 Cob_n 为 n 维闭流形作为对象、Y_0, Y_1 间的配边 X 作为态射的范畴。通常我们要将 Y, X 的几何结构附加考虑。令 $\mathcal{C}$ 为一般范畴。我们称从 Cob_n 到 $\mathcal{C}$ 的函子 $F : Cob_n \to \mathcal{C}$ 为以 $\mathcal{C}$ 为值的场论。

令 $\widetilde{Cob}_3$ 的对象为三元组 $(Y, \mathfrak{t}, g)$。Y 是有向闭三维流形，且满足 $b_1(Y) = 0$。$\mathfrak{t}$ 是 spin^c 结构，g 是 Y 的 Riemann 度规。从对象 $(Y_0, \mathfrak{t}_0, g_0)$ 到 $(Y_1, \mathfrak{t}_1, g_1)$ 的态射是三元组 $(X, \mathfrak{s}, \hat{g})$。这里，$X$ 是 Y_0 到 Y_1 的配边，$\mathfrak{s}$ 是 X 的 spin^c 结构且 $\mathfrak{s}|_{Y_i} = \mathfrak{t}_i$，$\hat{g}$ 是 X 的 Riemann 度规且 $\hat{g}|_{Y_i} = g_i$。

定理 7.28. *对应关系 $(Y, \mathfrak{t}, g) \mapsto SWF(Y, \mathfrak{t}, g), (X, \mathfrak{s}, \hat{g}) \mapsto \Psi_X(s, \hat{g})$ 决定了函子 $\widetilde{Cob}_3 \to \mathfrak{C}$。也就是说以下成立：*

(1) $\Psi_{Y\times[0,1]}(\pi^*\mathfrak{t}, \pi^*g) : SWF(Y, \mathfrak{t}, g) \to SWF(Y, \mathfrak{t}, g)$ *等于恒等态射* $id_{SWF(Y,\mathfrak{t},g)}$。*这里* $\pi : Y \times [0,1] \to Y$ *是投影。*

(2) *对于以下两个态射*

$$(X_0, \mathfrak{s}_0, \hat{g}_0) : (Y_0, \mathfrak{t}_0, g_0) \to (Y_1, \mathfrak{t}_1, g_1),$$

$$(X_1, \mathfrak{s}_1, \hat{g}_1) : (Y_1, \mathfrak{t}_1, g_1) \to (Y_2, \mathfrak{t}_2, g_2),$$

有

$$\Psi_{X_0\cup_{Y_1}X_1}(\mathfrak{s}_0\cup_{Y_1}\mathfrak{s}_1,\hat{g}_0\cup_{Y_1}\hat{g}_1)=\Psi_{X_1}(\mathfrak{s}_1,\hat{g}_1)\circ\Psi_{X_0}(\mathfrak{s}_0,\hat{g}_0).$$

这个定理的证明长得过分，本书无法进行。这个定理的 (1) 可以根据笹平—Stoffregen[?] 说明。(2) 可以根据 Manolescu[?] 说明。另外参见 Khandhawit—林—笹平 [?] 的论文。

推论 7.29. *对于 Y 的 Riemann 度规 g_0,g_1，有同构*

$$\Psi_{Y\times[0,1]}(\pi^*\mathfrak{t},\hat{g}):SWF(Y,\mathfrak{t},g_0)\to SWF(Y,\mathfrak{t},g_1).$$

这里，$\hat{g}$ 是 $Y\times[0,1]$ 的 Riemann 度规且 $\hat{g}|_{Y\times\{i\}}=g_i$。是故，$SWF(Y,\mathfrak{t},g)$ 除去典范同构后，是不依赖于 g 的 (Y,t) 的不变量。

证明. TBA □

由命题 7.22、定理 7.28、推论 7.29 可得以下：

推论 7.30. *$\Psi_X(\mathfrak{s},\hat{g})$ 除去推论 7.29 给出的同构后，不依赖于 $\hat{g}$。*

这里讲述的只是关于 Riemann 度规，但是同理对 $\lambda,\mu,(N,L)$ 同理有定理 7.14 成立。同理可以证明定理 7.16.

将 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型更紧凑地定义成不依赖于构造时使用的数据的三维流形不变量，最好使用 Kroheimer-Mrowker[?] 的如下讨论。

首先，对一般范畴 $\mathcal{C}$，范畴 $\mathcal{C}/\mathrm{CAN}$ 如下定义。$\mathcal{C}/\mathrm{CAN}$ 的对象是组 $(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A},\{f_{\alpha_1\alpha_2}\}_{\alpha_1,\alpha_2\in A})$。这里，$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是集合 A 索引的 $\mathcal{C}$ 的对象族，$f_{\alpha_1\alpha_2}:x_{\alpha_1}\to x_{\alpha_2}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射，满足

$$f_{\alpha\alpha}=id_{x_\alpha},f_{\alpha_2\alpha_3}\circ f_{\alpha_1\alpha_2}=f_{\alpha_1\alpha_3}.$$

从 $(\{x_\alpha\}_{\alpha\in A},\{f_{\alpha_1\alpha_2}\}_{\alpha_1,\alpha_2\in A})$ 到 $(\{y_\alpha\}_{\beta\in B},\{g_{\beta_1\beta_2}\}_{\beta_1,\beta_2\in B})$ 的态射是族 $\{m_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$。这里 $m_{\alpha\beta}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $x_\alpha\to x_\beta$，满足如下的交换图：

(TBA)

从定理 7.28 得到以下：

定理 7.31. *令 Cob_3 是对象为 $(Y,\mathfrak{t})$，从 $(Y_0,\mathfrak{t}_0)$ 到 $(Y_1,\mathfrak{t}_1)$ 的态射为 $(X,\mathfrak{s})$ 的范畴。其中 Y 是闭三维流形，$b_1(Y)=0$，$\mathfrak{t}$ 是 Y 的 $spin^c$ 结构，$(X,\mathfrak{s})$ 是从 $(Y_0,\mathfrak{t}_0)$ 到 $(Y_1,\mathfrak{t}_1)$ 的 $spin^c$ 配边。*

令 $A(Y,\mathfrak{t})$ 是定义 $(Y,\mathfrak{t})$ 的 *Seiberg-Witten Floer* 同伦型时需要的数据 $(g,\lambda,\mu,(N,L))$ 的集合。对应关系

$$
\begin{aligned}
&(Y,\mathfrak{t}) \mapsto (\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{f_{\alpha_1\alpha_2}\}_{\alpha_1,\alpha_2\in A}),\\
&x_\alpha = SWF(Y,\mathfrak{s},\alpha),\\
&f_{\alpha_0\alpha_1} = \Psi_{Y\times[0,1]}(\pi^*\mathfrak{s}) : SWF(Y,\mathfrak{s},\alpha_0) \to SWF(Y,\mathfrak{s},\alpha_1),\\
&(X,\mathfrak{s}) \mapsto \{m_{\alpha\beta}\}_{\alpha\in A(Y_0,\mathfrak{s}_0),\beta\in A(Y_1,\mathfrak{s}_1)},\\
&m_{\alpha\beta} = \Psi_X(\mathfrak{s}) : \Sigma^{\mathbb{C}^{\frac{c_1(\mathfrak{s})^2-\sigma(X)}{8}}} SWF(Y_0,\mathfrak{t}_0,\alpha) \to SWF(Y_1,\mathfrak{t}_1,\beta)
\end{aligned}
$$

定义了函子

$$SWF : Cob_3 \to \mathfrak{C}/\mathrm{CAN}.$$

此时，$\mathfrak{C}/\mathrm{CAN}$ 的对象 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 是 $(Y,\mathfrak{t})$ 的不变量。

5. SWF 型空间与 Borsuk–Ulam 型定理

虽然展示了关于球面之间的 S^1 等变映射的（不等式[1]）限制，但是关于被称为 SWF 型空间的更广类别的空间之间的 S^1 等变映射，则推广了定理 2.6 的 Borsuk–Ulam 型定理。推广了的 Borsuk–Ulam 型定理可以配合相对 Bauer-古田不变量，得到带边界四维流形的交叉形式的应用。

定义 7.32. 令 Z 是带基点 S^1 等变 CW 复形，l 是大于 *0* 的整数。说 Z 是 l 级 S^1-*Seiberg-Witten Floer* 型（S^1-*SWF* 型），是指 S^1 不动点集 Z^{S^1} 与 S^l 同伦等价，且 $Z\setminus Z^{S^1}$ 上的 S^1 作用是自由的。

对带基点 S^1 等变 CW 复形 Z，令 $\tilde{H}^*_{S^1}(Z;\mathbb{R})$ 是 S^1 等变约化上同调

$$\tilde{H}^*_{S^1}(Z;\mathbb{R}) := \tilde{H}^*(Z\wedge_{S^1} ES^1_+;\mathbb{R}).$$

这里，$ES^1(=\mathbb{C}^\infty)$ 是 S^1 的万有丛 $ES^1\to BS^1$ 的全空间，ES^1_+ 是 ES^1 加上基点 $*$ 的 $ES^1\coprod\{*\}$。$\tilde{H}^*(Z;\mathbb{R})$ 是多项式环 $\mathbb{R}[U](=H^*(S^0;\mathbb{R}))$ 上的分次模。另一方面，注意到形式幂级数环 $\mathbb{R}[[U]]$ 是主理想整环，对任意理想 I，存在大于 0 的整数 h 使得 $I=(U^h)$。这里 (U^h) 是 U^h 生成的理想。

[1]译者注

定义 7.33. 令 Z 是 l 级 S^1 等变 SWF 型空间。此时，$h(Z) \in \mathbb{Z}$ 定义为以下。包含映射 $i : Z^{S^1} \hookrightarrow Z$ 诱导 $\mathbb{R}[U]$ 拟同构映射

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{*+l}(Z;\mathbb{R}) &\xrightarrow{i^*} \tilde{H}^{*+l}(Z^{S^1};\mathbb{R}) \\ &\cong \tilde{H}^{*+l}(S^l;\mathbb{R}) = \tilde{H}^*(S^0;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[u] \\ &\hookrightarrow \mathbb{R}[[U]]\end{aligned}$$

的像生成的 $\mathbb{R}[[U]]$ 的理想为 $I(Z)$。此时, 存在大于 0 的整数 h, 可写为 $I(Z) = (U^h)$。将 $h(Z)$ 定义为这个整数 h。

作为定理 2.6 的推广有以下成立。

定理 7.34. 令 Z, Z' 为 l 级 SWF 型 S^1 等变 CW 复形。并且令

$$f : Z \to Z'$$

为 S^1 等变映射，到 S^1 不动点到限制

$$f^{S^1} : Z^{S^1} \to (Z')^{S^1}$$

是同伦等价。此时成立有

$$h(Z) \leq h(Z').$$

证明. TBA □

接下来很容易证明

引理 7.35. 有以下成立

$$h(\Sigma^{\mathbb{R}} Z) = h(Z), h(\Sigma^{\mathbb{C}} Z) = h(Z) + 1.$$

例 7.36. $h((\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^n)^+) = n$。

S^1 映射

$$f : (\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^n)^+ \to (\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^{n'})^+,$$

令 $f^{S^1} : (\mathbb{R}^m)^+ \to (\mathbb{R}^m)^+$ 是同伦等价。此时根据定理 7.34，有

$$n = h((\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^n)^+) \leq h((\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{C}^{n'})^+) = n'.$$

这就是定理 2.6 的不等式。

令 $G = \mathrm{Pin}(2)$。下面说明作为定理 2.8 推广的 G 等变 Borsuk–Ulam 型定理。此后说明的 G 等变 Borsuk–Ulam 型定理都来自于 Manolescu[?]。

定义 7.37. 令 Z 是带基点 G-CW 复形，l 是大于 *0* 的整数。Z 是 l 级 *G-Seiberg-Witten Floer* 型（*G-SWF* 型）是指，S^1 不动点集 Z^{S^1} 同伦等价于 $(\tilde{\mathbb{R}}^l)^+$，且 $Z \setminus Z^{S^1}$ 上 G 的作用是自由的。这里 $\tilde{\mathbb{R}}$ 是 G 的非平凡实一维表示。

令 $\mathbb{Z}$ 是 l 级 G-SWF 型。令 l 是偶数。令 $R(G)$ 的理想 $\mathcal{I}(Z)$ 为限制映射与 Bott 周期律同构的合成

$$\tilde{K}_G(Z) \cong \xrightarrow{i^*_{S^1}} \tilde{K}_G(Z^{S^1}) \cong \tilde{K}_G((\tilde{\mathbb{R}}^l)^+)$$
$$\cong \tilde{K}_G(\tilde{\mathbb{C}}^{\frac{1}{2}l}) \cong \tilde{K}_G(pt) = R(G)$$

的像。有

$$\mathcal{I}(Z) = \{y_x \in R(G) | x \in \tilde{K}_G(Z)\}.$$

这里，对 $x \in \tilde{K}_G(Z)$，用 $i^*_{S^1}x = y_x b_{\tilde{\mathbb{C}}^{\frac{l}{2}}}$ 定义 $y_x \in R(G)$。这里，$b_{\tilde{\mathbb{C}}^{\frac{l}{2}}}$ 是 Bott 类。

引理 7.38. 令 Z 是 *G-SWF* 型空间。令 l 是偶数。此时，存在某个 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $w^m, z^m \in \mathcal{I}(Z)$。这里，$w, z \in R(G)$ 如命题 *2.7* 定义。

证明见 Manolescu 的论文 [?] 的第三节。

j 作用的迹定为环同态

$$\mathrm{Tr}_j : R(G) \to Z$$

且有 $\mathrm{Tr}_j(w) = \mathrm{Tr}_j(z) = 2$. 因为 Z 是主理想整环, 根据引理 7.38, 存在某个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 可以写

$$\mathrm{Tr}_j(\mathcal{I}(Z)) = (2^k).$$

(2^k) 是 2^k 生成的 $\mathbb{Z}$ 的理想。

定义 7.39. 令 Z 为 l 级 *SWF* 型 G 空间。令 l 为大于 0 偶数。令 $k(Z) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为满足 *(7.15)* 的整数 k。

定义 7.40. 令 Z 为 l 级 *SWF* 型 G 空间。令 l 为大于 0 偶数。存在某个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\mathcal{I}(Z) = (z^k)$$

时，Z 称为 K_G 分离型。

下面是对 G-SWF 型空间的 Borsuk–Ulam 型定理。

定理 7.41. 令 Z_0, Z_1 分别是 l_0, l_1 级的 G-SWF 型空间。l_0, l_1 都是大于 0 的偶数。还令

$$f : Z_0 \to Z_1$$

是 G 映射。对 $l_0 < l_1$，令

$$f^G : Z_0^G \to Z_1^G$$

是同伦等价。此时成立

$$k(Z_0) + \frac{1}{2}l_0 \leq k(Z_1) + \frac{1}{2}l_1.$$

另外若 Z_0 是 K_G 分离型，则成立

$$k(Z_0) + \frac{1}{2}l_0 + 1 \leq k(Z_1) + \frac{1}{2}l_1.$$

证明. TBA □

引理 7.42. 令 Z 是 l 级 G-SWF 型空间。令 l 是大于 0 偶数。此时有

$$\mathcal{I}(\Sigma^{\tilde{\mathbb{R}}^2} Z) = \mathcal{I}(Z), \mathcal{I}(\Sigma^{\mathbb{H}} Z) = z\mathcal{I}(Z).$$

特别地，满足

$$k(\Sigma^{\tilde{\mathbb{R}}^2} Z) = k(\mathbb{Z}), k(\Sigma^{\mathbb{H}} Z) = k(Z) + 1.$$

证明. TBA □

例 7.43. 令 l 是大于 0 偶数。有

$$\mathcal{I}((\tilde{\mathbb{R}}^l \oplus \mathbb{H}^n)^+) = (z^n), k((\tilde{\mathbb{R}}^l \oplus \mathbb{H}^n)^+) = n.$$

$(\tilde{\mathbb{R}}^l \oplus \mathbb{H}^n)^+$ 是 K_G 分离型的。

6. 带边界四维流形的相交形式

使用相对 Bauer-古田不变量，我们展示对光滑带边界四维流形的相交形式施予的限制。这将是定理 4.3 和定理 4.9 的推广。

令 Y 是有向闭三维流形且满足 $b_1(Y) = 0$，$\mathfrak{t}$ 是 Y 的 spin^c 结构，g 是 Y 的 Riemann 度规。令 (N, L) 是在定理 7.9 中得到的 $\mathrm{Inv}(B(V_\lambda^\mu, R); \varphi_\lambda^\mu)$ 的 S^1 等变 Conley 对。这里 $\lambda \ll 0 \ll \mu$。

引理 7.44. N/L 是定理 *7.32* 意义上的 $\dim V^0_{\lambda,\mathbb{R}}$ 级 SWF 型空间。这里 $V^0_{\lambda,\mathbb{R}} = (V^0_\lambda)^{S^1} = V^0_\lambda \cap i\Omega^1(Y)$。

证明. TBA □

定义 7.45. 令 $n(Y,\mathfrak{t},g) \in \mathbb{Q}$ 是 *(7.6)* 定义的数。我们定义

$$h(Y,\mathfrak{t}) = h(N/L) - \dim_{\mathbb{C}} V^0_{0,\mathbb{C}} - n(Y,\mathfrak{t},g) \in \mathbb{Q}.$$

这里 $V^0_{\lambda,\mathbb{C}} = V^0_\lambda \cap \Gamma(S)$。

命题 7.46. 定义 *7.45* 中定义的 $h(Y,\mathfrak{t})$ 不依赖于 λ, μ, g，是 $(Y,\mathfrak{t})$ 的不变量。

证明. TBA □

$h(Y,\mathfrak{t})$ 早先被 Froyshøv[?] 利用 Seiberg-Witten Floer 同调定义过了。我们将 $h(Y,\mathfrak{t})$ 称为 Froshøv 不变量。

利用 $h(Y,\mathfrak{t})$，可以推广 Donaldson 定理（定理 4.3）。令 X 是有向光滑紧致四维流形，且 $\partial X = Y$。此时与闭流形时同理有相交形式

$$Q_X : H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} \otimes H_2(X;\mathbb{Z})/\operatorname{Tor} \to \mathbb{Z}.$$

这里，Q_X 不一定是幺模的。Q_X 是幺模的等价于 $H_1(Y;\mathbb{Z}) = 0$。

定理 7.47 (Froyshøv). 令 Y_0, Y_1 为有向三维闭流形，且 $b_1 = 0$。令 $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1$ 是 Y_0, Y_1 的 *spin*^{c} 结构。令 $(X,\mathfrak{s})$ 是从 $(Y_0,\mathfrak{t}_0)$ 到 $(Y_1,\mathfrak{t}_1)$ 的光滑 *spin*^{c} 配边。此时成立

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 + b_2(X)}{8} + h(Y_0,\mathfrak{t}_0) \le h(Y_1,\mathfrak{t}_1).$$

证明. TBA □

X 是 Y 作为边界的四维流形之时，从 X 中去除一个小的四维圆盘后，我们得到从 S^3 到 Y 的配边。因为 $h(S^3,\mathfrak{t}_{S^3}) = 0$，我们得到以下：

推论 7.48. 令 $(X,\mathfrak{s})$ 为紧致光滑 *spin*^{c} 四维流形，且 $(Y,\mathfrak{t})$ 为边界。假定 Q_X 负定，且 $b_1(Y) = 0$。此时成立

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 + b_2(X)}{8} \le h(Y,\mathfrak{s}).$$

这个不等式将给出光滑四维流形 X 的相交形式的限制。令 $H_1(Y,\mathbb{Z})=0$。此时根据 Poincaré 对偶和万有系数定理有 $H_2(Y;\mathbb{Z})=0$。从而，Y 的 spin^c 结构（除去同构）只有一个。令 $h(Y,\mathfrak{t})=0$。因为 Q_X 为幺模，根据定理 5.38，Q_X 可对角化。如令 $Y=S^3$，这就成为 Donaldson 定理（定理 4.3）。

令 $G=\mathrm{Pin}(2)$。

定义 7.49. 令 $(Y,\mathfrak{t})$ 为 *spin* 闭三维流形且 $b_1(Y)=0$。此时定义

$$\kappa(Y,\mathfrak{t})=2(k(N/L)-\dim_{\mathbb{H}} V^0_{\lambda,\mathbb{H}})-n(Y,g,\mathfrak{s})\in\frac{1}{8}\mathbb{Z}.$$

这里 $\lambda\ll 0,\mu\gg 0,(N,L)$ 是等变指数对，且有 $V^0_{\lambda,\mathbb{H}}=^0_\lambda\cap\Gamma(S)$。

命题 7.50. $\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 的值不依赖于 λ,μ,g 的取法，是 $(Y,\mathfrak{s})$ 的不变量。

证明. 依定理 7.16 和引理 7.42. □

$\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 是根据 Manolescu[**?**] 定义的不变量。

定理 7.51 (Manolescu). 令 $(X,\mathfrak{s})$ 为从 $(Y_0,\mathfrak{t}_0)$ 到 $(Y_1,\mathfrak{t}_1)$ 的光滑 *spin* 配边，且 $b^+(X)>0$。此时成立

$$-\frac{\sigma(X)}{8}+\kappa(Y_0,\mathfrak{t}_0)-1\le b^+(X)+\kappa(Y_1,\mathfrak{t}_1).$$

另外，当 $(Y_0,\mathfrak{t}_0)$ 是 K_G 分离型的话，成立

$$-\frac{\sigma(X)}{8}+\kappa(Y_0,\mathfrak{t}_0)+1\le b^+(X)+\sigma(Y_1,\mathfrak{t}_1).$$

证明. TBA □

推论 7.52. 令 X 是有向、光滑、紧致四维流形，边界为 Y。令 $\mathfrak{s}$ 是 X 的 *spin^c* 结构。令 $\mathfrak{t}:=\mathfrak{s}|_Y$。若有 $b^+(X)>0$，则

$$-\frac{\sigma(X)}{8}+1\le b^+(X)+\kappa(Y,\mathfrak{t}).$$

证明. 令从 X 中去除四维小圆盘后得到的四维流形为 X'。此时 X' 是从 S^3 到 Y 的配边。$(S^3,\mathfrak{t}_{S^3})$ 是 K_G 分离型，且有 $\kappa(S^3,\mathfrak{t}_{S^3})=0$。对 X' 使用定理 7.51，就可得这个主张。 □

这里，若令 $Y=S^3$，就得到了定理 4.9（并请参照 5.8 节）。

7. 计算及其他应用

Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 和不变量 $\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 的计算并不容易。根据 Manolescu[?]，人们已经计算出来一系列 Seifert 纤维空间的 $SWF(Y,\mathfrak{t})$，此后，计算方面几乎没有进展。但是最近，Dai—笹平—Stoffregen[?] 对满足 $H_1(Y;\mathbb{Q})=0$ 的全部 Seifert 纤维空间在内的一大类三维流形，具体计算了 $SWF(Y,\mathfrak{t})$。此外还计算了 $\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 的值，并做了比较。依据到此的工作，我们得到了更多计算例子。今后，可以期待利用这个计算的应用。关于 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 和 $\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 的计算，参照这篇论文 [?]。

作为 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 的应用，本书讲述了关于有边界四维流形的相交形式的事情。固定三维流形 Y，将 Y 作为边界的四维流形的相交形式有可能是怎样的二次型，这样的问题我们还不甚了解。关于这个的研究不是使用 Seiberg-Witten 理论，而是 Donaldson 理论。比如参照 Scaduto[?] 的论文。

作为相交形式以外的应用，根据 Manolescu[?] 可以用来解决关于拓扑流形的三角剖分的未解难题。这个论文里使用了 $SWF(Y,\mathfrak{t})$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数 Pin(2) 等变同调 $H_*^{\mathrm{Pin}(2)}(SWF(Y,\mathfrak{t});\mathbb{Z})$，导入了 Froshøv 型不变量 $\alpha(Y,\mathfrak{t}),\beta(Y,\mathfrak{t}),\gamma(Y,\mathfrak{t})$。利用这些不变量的性质，得以解决了 Rholin 不变量相关的问题。与松本尭生 [?] 和 Galewski-Stern[?] 的结果相结合，可以证明五维以上各维度存在不允许三角剖分的拓扑流形。另外，根据林 [?] 的证明，不使用 Floer 同伦型，只用 Floer 同调就可以做同理解决。作为别的应用，今野一谷口 [?] 应用到有边界四维流形的微分同胚群。使用 Seiberg-Witten Floer 同伦型 $SWF(Y,\mathfrak{t})$，他们发现了例子可证明 Y 作为边界的四维流形 X 的微分同胚群 $\mathrm{Diff}(X)$ 与同胚群 $\mathrm{Homeo}(X)$ 并非弱同伦等价。甚者，今野一宫澤一谷口 [?] 将 $\kappa(Y,\mathfrak{t})$ 应用到纽结。根据 Seiberg-Witten Floer 稳定同伦型的计算，可以期待这些应用可以运用到更多流形和纽结。